

Esercizio 1 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti

$$\frac{2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}, \quad \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 4x^2 + 5}, \quad \frac{10^x}{2 \sin x - 1}, \quad \frac{10^x - 100}{\sin x + 2}, \quad \frac{1}{|x + 2|\sqrt{x^2 + 2x - 15}},$$

$$\cos(\pi x^2), \quad \tan(\pi x^2), \quad \sqrt{12 + 2^x - 4^x}.$$

Determinare gli eventuali punti in cui le funzioni si annullano.

Esercizio 2 Disegnare i grafici delle funzioni seguenti

$$f(x) = |x - 3| + 1, \quad g(x) = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad h(x) = |3 - 4x - x^2|.$$

Esercizio 3 Scrivere la funzione composta $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$ nei seguenti casi:

$$(i) \quad f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2x;$$

$$(ii) \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Esercizio 4 Data la funzione $f(x) = x^3$, disegnare il grafico di

$$f_0(x) = f(x) + 1, \quad f_1(x) = f(x) - 1, \quad f_2(x) = f(x + 2), \quad f_3(x) = f(x - 2), \quad f_4(x) = 3f(x),$$

$$f_5(x) = f(3x), \quad f_6(x) = f_0(-x), \quad f_7(x) = -f_0(x), \quad f_8(x) = |f_0(x)|, \quad f_9(x) = f_0(|x|).$$

[Osservare che le ultime 4 funzioni dipendono da f_0 e non da f].

Esercizio 5 Sia $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 2$. Dopo aver dimostrato che è invertibile determinare esplicitamente la funzione inversa.

Esercizio 6 Mostrare usando la definizione la validità di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n^2+3n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Esercizio 7 Siano x_n, y_n due successioni convergenti a x_0 e y_0 rispettivamente. Si provi che la successione

$$z_n = \max\{x_n, y_n\}$$

è convergente e se ne determini il limite.

Esercizio 8 Calcolare il limite delle seguenti successioni

$$\frac{3^n}{n^{100}}, \quad \frac{4n^4 - n^3 + 4n^2}{2n^4 + 3}, \quad \frac{3n^3 + 2n + 1}{4n^4 + 3n^3 + 2}, \quad \frac{3^n + n}{n^3 + 1}, \quad n^2 2^{-n}, \quad \frac{3^n}{2^n + 4^n},$$

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \quad \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}, \quad \sqrt{n^2 + n} - n,$$

$$\frac{3^n - n^2}{2^n + n^5}, \quad \sqrt[n]{\frac{n+3}{n}}, \quad \frac{\sqrt{n^2 - n + 1} - 2n}{n+1},$$

Esercizio 9 Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^\alpha + 2}$$

Esercizio 10 1) Dimostrare che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l > 1$ allora definitivamente la successione è strettamente maggiore di 1.

2) Costruire una successione a_n che converge a 1 con infiniti termini strettamente maggiori di 1 e infiniti termini strettamente minori di 1.